

# 基于半正定约束的最差性能最优通用信号模型顽健波束成形算法

徐定杰, 贺瑞, 沈锋

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对通用信号模型下的顽健波束成形问题, 提出了一种基于半正定约束的最差性能最优顽健自适应波束成形算法, 通过对波束成形器进行建模和变换, 得到了一种简单的顽健自适应波束成形器的表达式。对波束成形器进行求解, 不仅得到了最优权矢量的近似闭式解, 而且获得了一定的性能改善, 并且该算法具有较低的计算复杂度。仿真结果表明了该算法的有效性和正确性。

**关键词:** 自适应波束成形; 最差性能最优; 通用信号模型; 半正定约束

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2013)03-0001-05

## Robust beamforming based on the worst-case performance optimization with positive semi-definite constraints

XU Ding-jie, HE Rui, SHEN Feng

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** For the robust adaptive beamforming problem of the general signal models, a robust beamforming algorithm based on the worst-case performance optimization with positive semi-definite constraints was proposed. A simple robust adaptive beamformer was derived by modeling and transforming. Not only an approximate closed-form solution to the optimal weight vector was derived with low complexity, but also the performance improvement could be obtained. The final simulation attests its effectiveness and correctness.

**Key words:** adaptive beamforming; worst-case performance optimization; general signal models; positive semi-definite constraints

### 1 引言

自适应波束成形技术广泛应用于雷达、通信、声纳、声学以及医学成像等众多领域。在阵列导向矢量和协方差矩阵准确已知的情况下, 自适应波束成形器能输出最优的信号干扰噪声比(SINR)。但在实际应用中, 由于阵列校正误差、未知传感器互耦、近场波前失真、源扩展、相干和非相干的局部散射以及有限的采样数据等因素的影响, 使得实际的阵列导向矢量和协方差矩阵与其理想值之间存在误差, 严重影响了波束成形器的性能。

目前, 研究者已经提出了很多顽健的自适应波束成形方法来解决上述问题, 但这些算法大多是针

对简单的点信号源模<sup>[1-10]</sup>。而在一些实际应用中, 如无线通信和声纳, 由于相干和非相干散射(空间分布)或波前扰动的作用, 天线阵列不能再将这些信号源作为点信号源, 应当建模为具有一定中心角和角度扩展的空间分布式信号源。此时, 需要利用高秩信号模型来描述信号散射和波前扰动的影响, 而且通常利用信号的协方差矩阵来描述期望信号的阵列响应, 而不是期望信号的导向矢量。因此, 多数算法不能直接推广到高秩信号模型。针对通用信号模型, 文献[11]提出了一种具有闭环形式解的顽健自适应波束成形算法, 通过使期望信号和接收信号的协方差矩阵对所有可能的失配维持无畸变响应从而提高顽健性, 即所谓的最差性能最优。但是求

收稿日期: 2012-03-13; 修回日期: 2012-12-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61102107)

**Foundation Item:** The National Natural Science Foundation of China (61102107)

解过程中没有考虑协方差矩阵的半正定特性,只是限制了失配约束参数必须小于协方差矩阵的最大特征值,而最优解的求取必须借助于约束参数。因此可能导致所求的解过于保守,无法获得最优解。文献[12]提出了一种基于迭代的顽健自适应波束成形算法,该算法附加了协方差矩阵的半正定约束,因此算法的性能有所提高。但是基于半正定规划的问题必须在每次迭代中由内点方法求解,大大增加了算法的计算复杂度,制约了算法的实际应用。

本文针对通用信号模型,提出了一种新的顽健自适应波束成形算法。该算法基于期望信号和接收信号协方差矩阵的最差性能最优,并且考虑了协方差矩阵的半正定约束。通过对波束成形器进行建模和变换,得到了一种新的顽健自适应波束成形器的表达式,并且通过对波束成形器进行求解,得到了最优权矢量的近似闭式解,相对于文献[12]中的迭代求解具有较低的计算复杂度并且更加接近于最优值。

## 2 通用信号模型

考虑一个传感器阵列是由  $M$  个阵元组成的理想均匀线阵,则  $M \times 1$  维的阵列接受信号为

$$x(k) = s(k) + i(k) + n(k) \quad (1)$$

其中,  $s(k)$ 、 $i(k)$  和  $n(k)$  分别表示统计独立的期望信号、干扰信号和噪声组成部分。阵列输出为  $y(k) = w^H x(k)$ , 其中,  $w = [w_0, w_1, \dots, w_{M-1}]^T$  为加权矢量,  $(\cdot)^T$  和  $(\cdot)^H$  分别表示矩阵的转置和共轭转置。阵列加权矢量  $w$  可以通过最大信干噪比准则获得

$$\max_w SINR = \max_w \frac{w^H R_s w}{w^H R_{i+n} w} \quad (2)$$

其中,

$$R_s = E \{s(k)s^H(k)\} \quad (3)$$

$$R_{i+n} = E \{(i(k) + n(k))(i(k) + n(k))^H\} \quad (4)$$

分别为阵列期望信号的协方差矩阵和干扰加噪声协方差矩阵。在点信号源模型下,期望信号  $s(k) = s_0(k)a_s$ , 期望信号协方差矩阵  $R_s = s_s^2 a_s a_s^H$ , 其中,  $s_0(k)$  为期望信号波形,  $s_s^2 = E \{s_0(k)^2\}$  为  $s_0(k)$  的协方差,  $a_s$  为期望信号的导向矢量。在这种

情况下,  $R_s$  的秩为 1, 并且式(2)可以简化为

$$\max_w SINR = \max_w \frac{s_s^2 |w^H a_s|^2}{w^H R_{i+n} w} \quad (5)$$

但在一些实际应用中,如无线通信和声呐中的非相干散射(空间分布)或具有波前扰动的信号源,天线阵列不能将这些信号源作为点源,应当建模成具有一定中心角和角度扩展的空间分布式信号源。在这种情况下,不能简单地利用信号的导向矢量建模,  $R_s$  可以表示为<sup>[13]</sup>

$$R_s = s_s^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r(q) a(q) a^H(q) dq \quad (6)$$

其中,  $r(q)$  为信号源空间角功率密度函数。因此,通用信号模型可以为点信号源或空间分布式信号源,称  $R_s$  为通用信号模型的协方差矩阵,它的秩为 1 到  $M$  之间的任意整数。通用信号模型下自适应波束成形算法可以表示为<sup>[11]</sup>

$$\min_w w^H R_{i+n} w \quad \text{s.t.} \quad w^H R_s w = 1 \quad (7)$$

则自适应波束成形算法的最优权矢量  $w_{\text{opt}}$  为

$$w_{\text{opt}} = p \{R_{i+n}^{-1} R_s\} \quad (8)$$

其中,  $p\{\cdot\}$  表示求矩阵的主特征矢量,即对应于最大特征值的特征矢量。

## 3 最坏情况下顽健自适应波束成形算法

在实际波束成形应用中,很难得到协方差矩阵  $R_s$  和  $R_{i+n}$  的真实值,一般用协方差矩阵的估计值和误差来表示真实的协方差矩阵,假定具有如下关系

$$R_s = \hat{R}_s + D_1 \quad (9)$$

$$R = \hat{R} + D_2 \quad (10)$$

其中,  $\hat{R}_s$  和  $\hat{R}$  分别表示  $R_s$  和  $R$  的估计值,  $D_1$  和  $D_2$  分别表示  $R_s$  和  $R$  的估计误差,用于描述阵列响应失配的影响,而且误差矩阵的模能够被一些已知的常数  $e > 0$ ,  $g > 0$  约束,即

$$\|D_1\| \leq g \quad (11)$$

$$\|D_2\| \leq e \quad (12)$$

其中,  $\|\cdot\|$  表示矩阵的 Frobenius 范数。

为了改善对于任意失配的顽健性,保证在最差失配条件下的无失真响应,基于最差性能最优的顽健波束成形算法可以表示为

$$\begin{aligned} \min_w \max_{\|g\|} w^H (\hat{R} + ?_1) w \\ \text{s.t. } w^H (\hat{R}_s + D_2) w = 1, \|D_2\| \leq \epsilon \end{aligned} \quad (13)$$

该波束成形算法可以描述为在最差失配  $D_2$  条件下保持期望信号的无失真阵列响应，同时在最差失配  $D_1$  条件下的阵列输出功率最小，因此该算法是基于最差性能最优准则的。通过文献[11]中的处理方法，该问题可以简化为

$$\begin{aligned} \min_w w^H (\hat{R} + gI) w \\ \text{s.t. } w^H (\hat{R}_s - eI) w = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

利用 Lagrange 乘数方法进行求解，该波束成形算法的最优解为

$$w_{\text{rob}} = p \left\{ (\hat{R} + rI)^{-1} (\hat{R}_s - eI) \right\} \quad (15)$$

#### 4 基于半正定约束的顽健自适应波束成形算法

由于算法(13)没有考虑协方差矩阵的半正定约束，可能导致所求的解过于保守。因此，提出了一种基于半正定约束的顽健自适应波束成形算法

$$\begin{aligned} \min_w \max_{\|g\|} w^H (\hat{R} + D_1) w \\ \text{s.t. } w^H (\hat{R}_s + D_2) w = 1, \|D_2\| \leq \epsilon \\ \hat{R} + D_1 \succeq 0, \hat{R}_s + D_2 \succeq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中， $\hat{R} + D_1 \succeq 0$  和  $\hat{R}_s + D_2 \succeq 0$  表示矩阵  $\hat{R} + D_1$  和  $\hat{R}_s + D_2$  为半正定矩阵。由于考虑了协方差矩阵的半正定约束，不能直接通过文献[11]的方法对该算法进行简化。但是由式(15)可以看出  $\hat{R}$  对应的是正加载，最差情况下  $D_1 = g w w^H / \|w\|^2$ ，满足  $\hat{R} + D_1 \succeq 0$ 。而最差情况下  $D_2$  不能使用传统的 Lagrange 乘数方法求解得到。通过特征分解  $\hat{R}_s = Q^H Q$ ，其中， $Q$  为  $\hat{R}_s$  的平方根矩阵，假设  $D$  为  $Q$  的误差矩阵，则  $\hat{R}_s + D_2 \succeq 0$  可变换为

$$(Q + D)^H (Q + D) \succeq 0 \quad (17)$$

则式(16)可以等价的转化为

$$\begin{aligned} \min_w w^H (\hat{R} + rI) w \\ \text{s.t. } \min_D w^H (Q + D)^H (Q + D) w = 1, \|D\| \leq h \end{aligned} \quad (18)$$

其中， $h$  为  $D$  的模约束参数且  $h > 0$ 。

#### 5 顽健波束成形算法的求解

为了对式(18)进行求解，首先要求解以下最小化问题

$$\begin{aligned} \min_D w^H (Q + D)^H (Q + D) w \\ \text{s.t. } \|D\| \leq h \end{aligned} \quad (19)$$

把目标函数展开，式(19)可转化为

$$\begin{aligned} \min_D w^H Q^H Q w + w^H Q^H D w + w^H D^H Q w + w^H D^H D w \\ \text{s.t. } \|D\| \leq h \end{aligned} \quad (20)$$

对于该最优化问题，最优解显然取在约束集合的边界上，因此不等式约束  $\|D\| \leq h$  可以等价转换为等式约束  $\|D\| = h$ ，也可以表示为

$$\|D\|^2 = h^2 \quad (21)$$

对于该等式约束最优化问题，可以利用 Lagrange 乘数方法进行求解，其解可通过最小化如下函数获得

$$\begin{aligned} L(D, l) = w^H Q^H Q w + w^H Q^H D w + w^H D^H Q w + \\ w^H D^H D w + l (\|D\|^2 - h^2) \end{aligned} \quad (22)$$

其中， $l$  为 Lagrange 乘数。求式(22)关于  $D$  的梯度并令其为零，得

$$Q w w^H + D w w^H + l D = 0 \quad (23)$$

可得  $D$  的最优解为

$$\hat{D} = -Q w w^H (I + w w^H)^{-1} \quad (24)$$

运用矩阵求逆引理，式(24)可重新写为

$$\hat{D} = -\frac{Q w w^H}{I + w w^H} \quad (25)$$

由于  $\text{tr}(D D^H) = \|D\|^2$ ，可得

$$\frac{\text{tr}(Q w w^H (Q w w^H)^H)}{(I + w w^H)^2} = h^2 \quad (26)$$

其中， $\text{tr}(\cdot)$  表示迹运算。由式(25)和式(26)，可以得到最差情况下  $\hat{D}$  的值，即

$$\hat{D} = -\sqrt{\frac{h^2}{w^H Q^H Q w w^H w}} Q w w^H \quad (27)$$

将式(27)代入到式(20)中的目标函数并且使用  $\hat{R}_s = Q^H Q$ ，可得

$$\begin{aligned}
& \mathbf{w}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{D} \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{D}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{D}^H \mathbf{D} \mathbf{w} \\
&= \mathbf{w}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} - h \sqrt{\frac{\mathbf{w}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}}} \mathbf{w}^H \mathbf{w} - h \sqrt{\frac{\mathbf{w}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}}} \mathbf{w}^H \mathbf{w} + h^2 \mathbf{w}^H \mathbf{w} \\
&= \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_s \mathbf{w} - 2h \sqrt{\frac{\mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_s \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}}} \mathbf{w}^H \mathbf{w} + h^2 \mathbf{w}^H \mathbf{w} \quad (28)
\end{aligned}$$

则最优化问题(18)可以等价转换为

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H (\hat{\mathbf{R}} + r\mathbf{I}) \mathbf{w} \\
& \text{s.t. } \mathbf{w}^H \left( \hat{\mathbf{R}}_s - 2h \sqrt{\frac{\mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_s \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}}} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{w} \leq 1 \quad (29)
\end{aligned}$$

由于约束的括号中含有未知的参数  $\mathbf{w}$ , 因此很难利用 Lagrange 乘数方法求得最优的闭式解。由于  $\hat{\mathbf{R}}_s = \mathbf{Q}^H \mathbf{Q}$ , 则式(29)中的约束可等价地转化为

$$\begin{aligned}
& \mathbf{w}^H \left( \mathbf{R}_s - 2h \sqrt{\frac{\mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_s \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}}} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{w} \\
&= \mathbf{w}^H \left( \mathbf{R}_s - 2h \sqrt{\frac{(\mathbf{Q}\mathbf{w})^H \mathbf{Q}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}}} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{w} \\
&= \mathbf{w}^H \left( \mathbf{R}_s - 2h \sqrt{\frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{w}\|^2}{\|\mathbf{w}\|^2}} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{w} \quad (30)
\end{aligned}$$

利用柯西—施瓦兹不等式  $\|\mathbf{Q}\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{Q}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$  可得

$$\begin{aligned}
& \mathbf{w}^H \left( \hat{\mathbf{R}}_s - 2h \sqrt{\frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{w}\|^2}{\|\mathbf{w}\|^2}} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{w} \\
& \mathbf{w}^H \left( \hat{\mathbf{R}}_s - 2h \sqrt{\|\mathbf{Q}\|^2} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{w} \quad (31)
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
& \mathbf{w}^H \left( \hat{\mathbf{R}}_s - 2h \sqrt{\frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{w}\|^2}{\|\mathbf{w}\|^2}} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{w} \\
& \mathbf{w}^H \left( \hat{\mathbf{R}}_s - 2h \sqrt{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_s)} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{w} \quad (32)
\end{aligned}$$

则最优化问题(29)可近似为

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H (\hat{\mathbf{R}} + r\mathbf{I}) \mathbf{w} \\
& \text{s.t. } \mathbf{w}^H \left( \hat{\mathbf{R}}_s - 2h \sqrt{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_s)} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{w} \leq 1 \quad (33)
\end{aligned}$$

由式(32)可以看出, 新约束条件比原来的约束更为严格。可以证明, 最优解发生在不等式约束的边界上, 因此式(33)与式(15)具有相似的形式, 与文献[11]中的求解方法类似, 利用 Lagrange 乘数方法进行求解, 该顽健自适应波束成形算法的最优解为

$$\mathbf{w}_{\text{rob}} = p \cdot (\hat{\mathbf{R}} + r\mathbf{I})^{-1} \left( \hat{\mathbf{R}}_s - 2h \sqrt{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_s)} \mathbf{I} + h^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \quad (34)$$

## 6 仿真分析

为了验证所提出算法的顽健性、求解的正确性, 进行了如下的仿真实验。考虑阵元数为 20, 阵元间隔为半个信号波长的理想均匀线阵。假设期望信号和干扰信号都为非相干散射源, 其角功率密度分别服从高斯分布和均匀分布, 中心波达方位角分别为  $30^\circ$  和  $-30^\circ$ , 方位角角度扩展方差都为 4。假定期望信号的角功率密度也服从高斯分布, 但中心波达方位角和角度扩展方差分别为  $32^\circ$  和 6。此外, 干扰信号功率和空间白噪声功率分别为 20dB 和 0dB。所有的实验结果均由 200 次 Monte-Carlo 实验平均所得, 并将其与对角加载算法 LSMI (diagonally loaded sample matrix inversion)、文献[11]和文献[12]提出的进行比较。其中, 对角加载因子  $r = 30$ , 模约束参数  $e$  和  $h$  分别设为  $9 \text{tr}(\mathbf{R}_s)/M$  和  $0.75 \sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_s)}$ 。文中使用 MATLAB CVX 工具箱对文献[12]中的迭代算法进行求解。

图 1 给出了不同输入 SNR 对输出 SINR 性能的影响。显然, 本文提出的方法和文献[12]中的算法要优于文献[11]中的算法, 这是由于附加了协方差矩阵的半正定约束, 提高了算法的性能。而本文提出的方法又要优于文献[12]中的迭代算法, 这是因为本文提出的方法得到了权矢量的闭式解, 该解更加接近权矢量的最优解。随着 SNR 的增加, 只有 LSMI 算法的输出 SINR 增加缓慢, 并且性能最差。

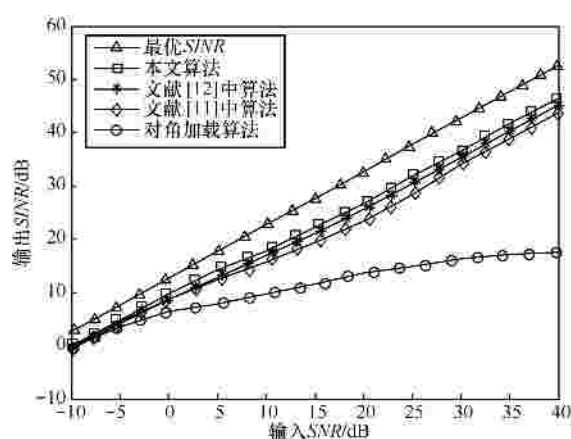


图 1 输出 SINR 相对于输入 SNR 的变化

图 2 给出了不同快拍数对波束成形器输出 SINR 的影响。从图中可以看出, 本文提出的方法在

快拍数变化时有着比较稳定的输出  $SINR$  ,并且优于文献[11]和文献[12]中算法的性能。同样,由于附加了协方差矩阵的半正定约束,文献[12]中算法输出的  $SINR$  要高于文献[11]中的算法。LSMI 算法输出的  $SINR$  最低,逐渐接近 15dB。

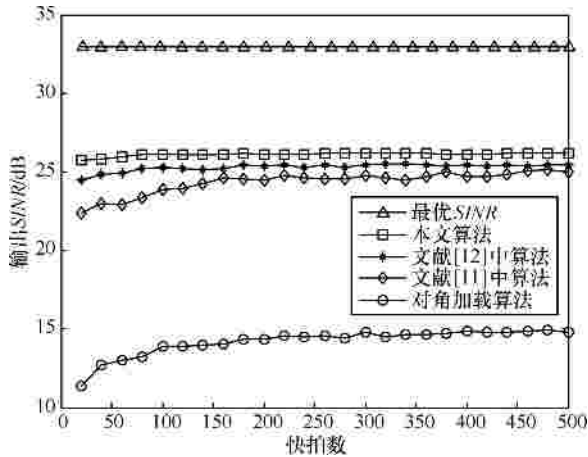


图2 输出  $SINR$  相对于快拍数的变化

## 7 结束语

针对传统波束成形算法在通用信号模型下的局限性,提出了一种基于半正定约束的通用信号模型顽健波束成形算法。该算法利用协方差矩阵的半正定约束,提高了算法的顽健性。通过对波束成形器进行变换和求解,得到了最优权矢量的近似闭式解,具有较低的计算复杂度。计算机仿真结果也验证了所提算法的正确性和有效性。

## 参考文献:

- [1] TIAN Z, BELL K L, VAN TREES H L. A recursive least squares implementation for LCMP beamforming under quadratic constraint[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(6): 1138-1145.
- [2] LI J, STOICA P, WANG Z S. On robust capon beamforming and diagonal loading[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(7):1702-1715.
- [3] LI J, STOICA P, WANG Z S, *et al.* Doubly constrained robust capon beamformer[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(9):2407-2423.
- [4] VOROBYOV S A, GERSHMAN A B, LUO Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(2):313-324.
- [5] FELDMAN D D, GRIFFITHS L J. A projection approach to robust adaptive beamforming[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(4):867-876.
- [6] BECK A, ELDAR Y C. Doubly constrained robust capon beamformer with ellipsoidal uncertainty sets[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2):753-758.
- [7] CHEN C Y, VAIDYANATHAN P P. Quadratically constrained beamforming robust against direction-of-arrival mismatch[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(8):4139-4150.
- [8] LIU W L, DING S X. An efficient method to determine the diagonal loading factor using the constant modulus feature[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(12):6102-6106.
- [9] HASSANIEN A, VOROBYOV S A, WONG K M. Robust adaptive beamforming using sequential quadratic programming: an iterative solution to the mismatch problem[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15:733-736.
- [10] LIU C F, LIAO G S. Robust capon beamformer under norm constraint[J]. Signal Processing, 2010, 90(5):1573-1581.
- [11] SHAHBAZPANAHI S, GERSHMAN A B, LUO Z Q, *et al.* Robust adaptive beamforming for general-rank signal models[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(9):2257-2269.
- [12] CHEN H H, GERSHMAN A B. Robust adaptive beamforming for general-rank signal models using positive semi-definite covariance constraint[A]. Proc IEEE ICASSP[C]. Las Vegas, USA, 2008:2341-2344.
- [13] 王永良, 陈辉, 彭应宁等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.  
WANG Y L, CHEN H, PENG Y N, *et al.* Spatial Spectrum Estimation Theory and Algorithm[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

## 作者简介:



徐定杰(1966-),男,浙江瑞安人,博士,哈尔滨工程大学教授、博士生导师,主要研究方向为阵列信号处理、卫星导航信号处理及抗干扰技术。



贺瑞(1986-),男,湖南常德人,哈尔滨工程大学博士生,主要研究方向为阵列信号处理、自适应波束成形技术。



沈锋(1981-),男,江苏扬州人,博士,哈尔滨工程大学副教授、硕士生导师,主要研究方向为卫星导航技术与信号检测技术。